

MECÁNICA DE SÓLIDOS

Curso 2017/18

Titulación:

Grado en Ingeniería Mecánica

Tema 3 – Plasticidad

Profesores:

Jorge Zahr Viñuela

José Antonio Rodríguez Martínez

Tema 3

Plasticidad

- 3.1 CUESTIONES PREVIAS**
- 3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN**
- 3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN**
- 3.4 TEORÍA INCREMENTAL Y TEORÍA TOTAL DE LA PLASTICIDAD**
- 3.5 TEOREMAS DE LA PLASTICIDAD**
- 3.6 PLASTICIDAD BIDIMENSIONAL**
- 3.7 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD**

Tema 3

Plasticidad

- 3.1 CUESTIONES PREVIAS
- 3.2 CRITERIOS DE PLASTIFICACIÓN
- 3.3 CARACTERIZACIÓN DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN
- 3.4 TEORÍA INCREMENTAL Y TEORÍA TOTAL DE LA PLASTICIDAD
- 3.5 TEOREMAS DE LA PLASTICIDAD**
- 3.6 PLASTICIDAD BIDIMENSIONAL
- 3.7 MÉTODOS NUMÉRICOS EN PLASTICIDAD

3.5.1 Potencial Plástico

(1/3)

Hipótesis.-

Supóngase la existencia de una **función escalar**, a la que se denominará **potencial plástico**, dependiente de las componentes del tensor de tensiones,

$$g = g(\sigma_{ij})$$

y tal que los **incrementos** de **deformaciones plásticas** pueden obtenerse como

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda'$$

siendo $d\lambda'$ un **escalar no negativo**.

- El escalar $d\lambda'$ proporcionaría la magnitud de la deformación
- La dirección del vector deformación plástica en el espacio de deformaciones sería paralela al gradiente de g (potencial plástico) y, por la tanto, ortogonal a las superficies $g = cte$.

3.5.1 Potencial Plástico

(2/3)

La **función de plastificación**, f , que conforma el criterio de plastificación de von Mises es:

$$f(q) = q - \sigma_Y = 0$$

Considérese la posibilidad de que la función **potencial plástico**, g , coincida con la **función de plastificación**, f :

$$g(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij})$$

Puesto que $q^2 = \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}$, puede demostrarse que

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial(q)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{q}$$

Si g es un **potencial de plastificación**, entonces:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda' = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{q} d\lambda'$$

Haciendo $d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\lambda'}{q}$, se recupera $d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda$, que es la **expresión de Prandtl-Reuss**.

3.5.1 Potencial Plástico

(3/3)

Una función que pueda utilizarse tanto como ***criterio de plastificación*** como ***potencial plástico*** ha de ser ***simétrica*** respecto a los invariantes del tensor de tensiones y, por tanto, no puede depender del sistema de coordenadas elegido.

Cuando ***g*** verifica estas condiciones es posible formular principios variacionales y teoremas de unicidad.

La teoría de plasticidad que entonces se desarrolla, se denomina TEORÍA DE LA PLASTICIDAD ASOCIADA

3.5.2 Principio del Máximo Trabajo Plástico

(1/2)

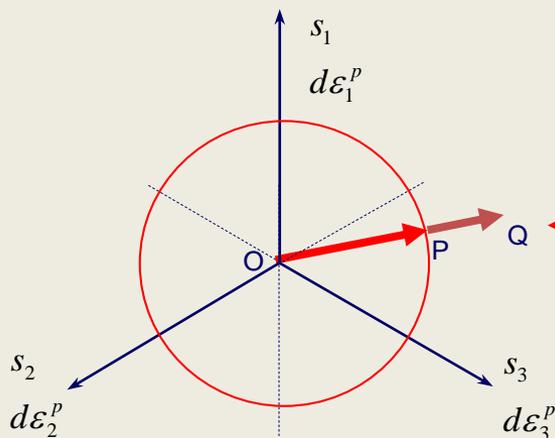
Considérese un sólido sometido a un estado de cargas del que se conoce el estado tensional en un cierto punto en el que se alcanza la plastificación y sean σ_1 , σ_2 y σ_3 las tensiones principales.

Para el material supóngase un comportamiento **rígido-perfectamente plástico**.

Por las características del material, el trabajo de deformación por unidad de volumen (disipado en la deformación) puede obtenerse como

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = s_{ij} d\varepsilon_{ij} = s_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$$

Las ecuaciones de Prandtl-Reuss dicen que $d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda$



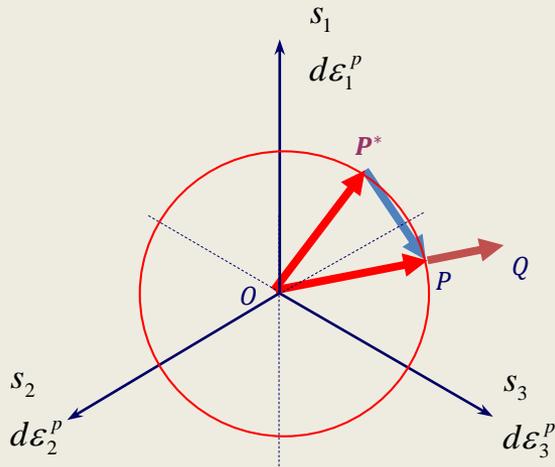
Las direcciones principales del tensor de tensiones DESVIADORAS coinciden con las del tensor incremento de deformación PLÁSTICA”.

La expresión de la energía disipada puede entonces interpretarse como el producto escalar de los vectores OP (s_i) y PQ ($d\varepsilon_i^p$)

$$dW = (s_1, s_2, s_3) \cdot (d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

3.5.2 Principio del Máximo Trabajo Plástico

(2/2)



Considérese ahora un estado tensional *diferente*, que también verifique el criterio de plastificación, y sean s_1^* , s_2^* , s_3^* las correspondientes tensiones desviadoras principales (punto P^*)

Para el mismo incremento de deformaciones, la energía disipada por unidad de volumen viene ahora dada por la expresión:

$$dW^* = s_i^* d\varepsilon_i^p = \overline{OP^*} \cdot \overline{PQ}$$

Recordando la expresión anterior para dW , resulta que la diferencia entre dW y dW^* es:

$$dW - dW^* = s_i d\varepsilon_i^p - s_i^* d\varepsilon_i^p = (s_i - s_i^*) d\varepsilon_i^p = \overline{P^*P} \cdot \overline{PQ} \geq 0$$

“El incremento de trabajo plástico, dW , que se requiere para producir un determinado incremento de deformación plástica a partir de P , es mayor que el incremento de trabajo plástico, dW^* , causado por cualquier otro estado tensional P^* que verifique el criterio de plastificación.”

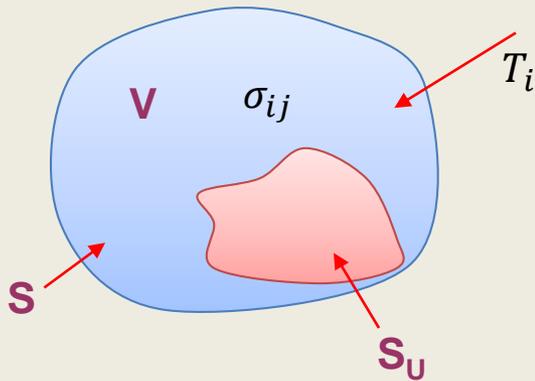
“Un material rígido-perfectamente plástico sufre deformaciones o distorsiones de manera tal que se produzca la **máxima disipación de energía posible**”

3.5.3 Teorema del Límite Inferior

(1/3)

Considérese un sólido de volumen V , superficie S sobre el que se actúa un estado de cargas T_i que da lugar a un campo de tensiones σ_{ij} con las que se alcanza la plastificación.

Considérese, también, al material del sólido como *rígido-perfectamente plástico*.



Sea un campo de desplazamientos virtuales du_i , impuestos en una parte S_u de S , que da lugar a un campo virtual de deformaciones $d\varepsilon_{ij}$

El Principio de los Trabajos Virtuales establece que:

$$\int_S T_i du_i dS = \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV = \int_V s_{ij} d\varepsilon_{ij} dV \quad (1)$$

Trabajo virtual de las fuerzas exteriores T_i

Trabajo virtual efectuado por la tensión en la def. (plástica) virtual $d\varepsilon_{ij}$

3.5.3 Teorema del Límite Inferior

(2/3)

Considérese ahora en el sólido un campo tensional σ_{ij}^* diferente al anterior y que esté estáticamente determinado, es decir que verifique:

- las ecuaciones de equilibrio interno $\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_i} = 0$
- las condiciones de contorno en **S-S_U**
- el criterio de plastificación

Sea T_i^* el sistema de cargas actuantes sobre el contorno asociadas a σ_{ij}^*

$$T_i^* = T_i \quad \text{en } \mathbf{S-S}_U \text{ pero, posiblemente } T_i^* \neq T_i \quad \text{en } \mathbf{S}_U$$

El Principio de los Trabajos Virtuales establece que

$$\int_S T_i^* du_i dS = \int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij} dV = \int_V s_{ij}^* d\varepsilon_{ij} dV \quad (2)$$

Trabajo virtual de las
fuerzas exteriores T_i^*

Trabajo virtual efectuado
por la tensión σ_{ij}^* en la def.
(plástica) virtual $d\varepsilon_{ij}$

3.5.3 Teorema del Límite Inferior

(3/3)

A partir de las igualdades (1) y (2) puede deducirse

$$\int_{S_U} (T_i - T_i^*) du_i dS = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij} dV \geq 0$$

O, igualmente,

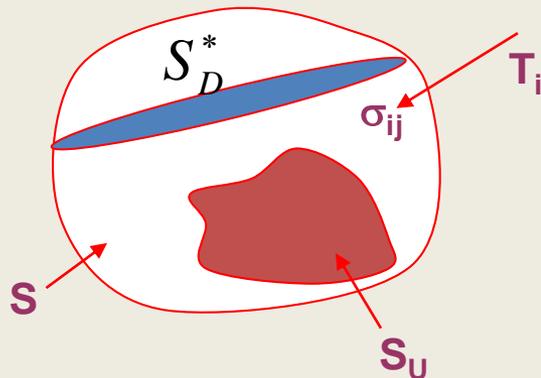
$$\int_{S_U} T_i du_i dS \geq \int_{S_U} T_i^* du_i dS$$

∴ “El trabajo virtual realizado por las **cargas reales** T_i , que actúan sobre el sólido es **MAYOR** o **IGUAL** al realizado por las cargas correspondientes a cualquier otro sistema de cargas T_i^* estáticamente admisible”

3.5.4 Teorema del Límite Superior

(1/3)

Considérese ahora un sólido de volumen V , superficie S y de un **material rígido-perfectamente plástico** siendo k la tensión tangencial admisible. Sobre el sólido actúa un estado de cargas T_i que da lugar a un campo de tensiones (real) σ_{ij} con las que se alcanza la plastificación. Sea du_i un campo de desplazamientos prescrito sobre S_U .



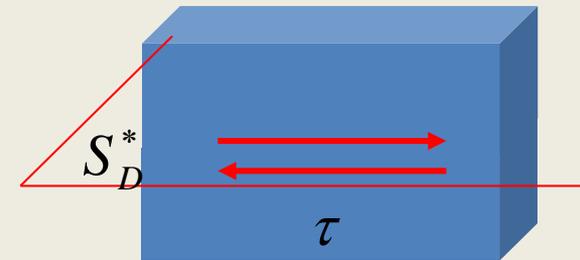
Sea un campo de desplazamientos du_i^* , diferente al anterior, y cinemáticamente admisible.

Ambos campos de desplazamientos verifican la condición de incompresibilidad plástica (deformación volumétrica plástica nula), es decir:

$$\varepsilon^{vol} = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0$$

NOTA:

Un **campo de desplazamientos** cinemáticamente admisible puede tener **discontinuidades en relación con movimientos tangenciales** pero no puede tenerlas en dirección normal



Tensión tangencial, componente de σ_{ij} , actuando sobre S_D^*

3.5.4 Teorema del Límite Superior

(2/3)

Ambos campos de desplazamientos dan lugar a sendos campos de deformaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} du_i \rightarrow d\varepsilon_{ij} \\ du_i^* \rightarrow d\varepsilon_{ij}^* \end{array} \right.$$

Por el Principio de los Trabajos Virtuales

$$\int_S T_i du_i^* dS = \int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* dV + \sum \int \tau |du^*| dS_D^* \quad (1)$$

NOTA: El campo de tensiones σ_{ij}^* correspondiente a du_i^* , no será, en general, estáticamente compatible (no verificará las ecuaciones de equilibrio interno)

Por el Principio del Máximo Trabajo Plástico

$$\int_V (\sigma_{ij}^* - s_{ij}) d\varepsilon_{ij}^* dV \geq 0$$

Substituyendo en (1) y teniendo en cuenta que $\tau < k$

$$\int_S T_i du_i^* dS \leq \int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* dV + \sum \int_{S_D} k |du^*| dS_D^*$$

De donde se deduce

$$\int_{S_U} T_i du_i^* dS_U \leq \int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* dV + \sum \int_{S_D} \tau |du^*| dS_D^* - \int_{S-S_U} T_i du_i^* dS_T$$

3.5.4 Teorema del Límite Superior

(3/3)

$$\int_{S_U} T_i du_i dS_U \leq \int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* dV + \sum \int_{S_D} \tau |du^*| dS_D^* - \int_{S-S_U} T_i du_i^* dS_T$$

Si consideramos el sólido en **deformación plana** formado por varios bloques indeformables que **deslizan** unos sobre otros

$$\rightarrow \int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* dV = 0$$

Si elegimos du_i^* de modo que $T_i du_i^* = 0$ en $S-S_T$:

$$\int_{S_U} T_i du_i dS_U \leq \sum \int_{S_D} k |du^*| dS_D^*$$

∴ “El trabajo virtual realizado por las **cargas reales** que actúan sobre el sólido es **MENOR** o **IGUAL** que el realizado por la **tensión tangencial de plastificación** al producirse un **desplazamiento relativo** entre **ambos lados de superficies de discontinuidad**”

3.5.5 Límites Superior e Inferior: Un Ejemplo de Aplicación

(1/3)

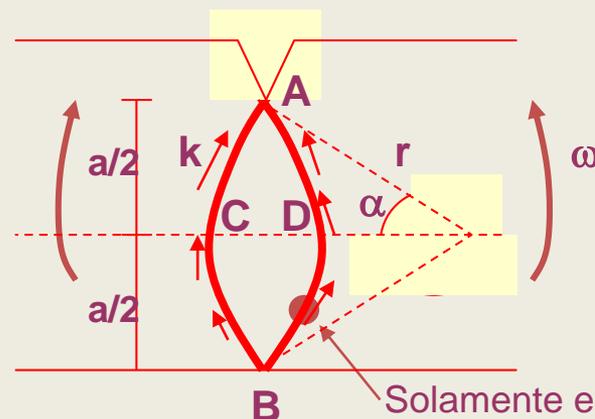
Problema.- Deformación permanente (plástica) de una pieza prismática entallada aplicando un par de momentos flectores en sus extremos



Se quiere establecer un valor inferior, M_I , y un valor superior, M_S , para M_p

Determinación de M_S : aplicación del teorema del límite superior.-

Como modo posible de deformación consideraremos un giro ω de los dos brazos de la pieza prismática según dos arcos circulares **ACB** y **ADB** de radio r y longitud L



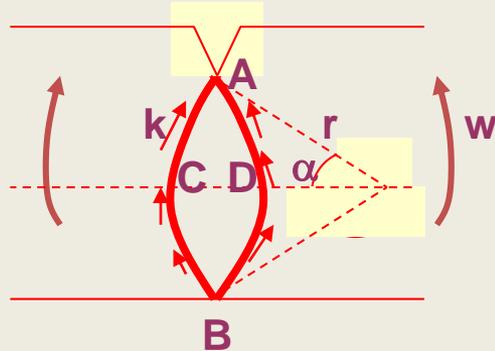
Solamente esfuerzos cortantes

No trabajan las presiones normales a los arcos

3.5.5 Límites Superior e Inferior: Un Ejemplo de Aplicación

(2/3)

Energía interna disipada:



Desplazamiento relativo

$$2k S u_{ACB} = 2k L r \omega$$

Fuerza

Trabajo de las fuerzas exteriores:

$$2M_s \omega$$

De donde

$$2M_s \omega = 2k L r \omega \quad \Rightarrow \quad M_s = k L r$$

De la figura puede deducirse

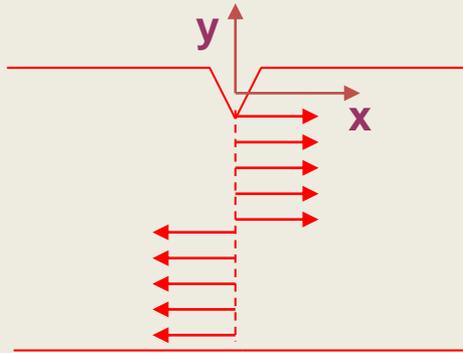
$$L r = \frac{a^2}{2} \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha} \quad \Rightarrow \quad M_s = k \frac{a^2}{2} \frac{\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

Para buscar el valor mínimo de M_s se hace nula su derivada $\Rightarrow 2\alpha = \tan \alpha$

$$\Rightarrow M_s \approx k a^2 0'69$$

3.5.5 Límites Superior e Inferior: Un Ejemplo de Aplicación

Determinación de M_I : aplicación del teorema del límite inferior.-



Como posible campo tensional consideraremos dos distribuciones uniformes de tensión normal σ_x como se indica en la figura

Si el material plastifica en el eje

$$\sigma_x - \sigma_y (= 0) = 2k$$

Criterio de Tresca

$$\Rightarrow \sigma_x = 2k$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_z = d\lambda \\ s_z \\ \varepsilon_z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow s_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = \sigma^h = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \Rightarrow \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$(\sigma_x)^2 + \left(\sigma_x - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 = 2\sigma_0^2 \Rightarrow \sigma_x = 2k$$

Criterio de von Mises

La resultante de las dos distribuciones uniformes de tensión normal es un momento

$$M_I = 2k \frac{a}{2} \frac{a}{2} = 0.5a^2$$

En total

$$M_S = 0.69ka^2 \geq M_p \geq 0.5a^2 = M_I$$

Teorema del límite superior

Teorema del límite inferior